УДК 539. 374

# АНИЗОТРОПНАЯ ЭКСЦЕНТРИЧНАЯ ТРУБА С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

**Т. А. Кульпина**

*ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»*

Для анизотропной эксцентричной трубы из сжимаемого материала, находящейся под воздействием внутреннего давления, но без учета касательных усилий, определены компоненты напряженного состояния до первого приближения включительно.

The following is defined in the article: the components of stress condition up to the first approaching for anisotropic eccentric tube made of compressed material under internal pressure but without tangential forces.

**Ключевые слова:** *анизотропия, эксцентричная труба, сжимаемость, давление.*

Рассмотрим анизотропную эксцентричную трубу из сжимаемого материала под действием внутреннего давления $p$.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине $k$ – пределу текучести на сдвиг, величины, имеющие размерность длины, – к величине $r_s^0$ – радиусу пластической зоны при равномерном растяжении: $d = 0$ [2].

В результате получим безразмерные величины:

$$s_{ij} = s_{ij} / k,\ p = p / k,\ q = q / k,\ t_i = t_i / k,\ G = G / k,$$

$$e_{ij} = e_{ij} / r_s^0,\ u = u / r_s^0,\ v = v / r_s^0,\ w = w / r_s^0,\ a = a / r_s^0,$$

где $s_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, $e_{ij}$ – компоненты скоростей деформации, $u, v, w$ – компоненты скоростей перемещений вдоль осей $r, q, z$ соответственно.

Для решения задачи в цилиндрической системе координат используем уравнения равновесия [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \\
\frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_r}{\partial q} + \frac{\partial t_{qz}}{\partial z} + \frac{2t_{rq}}{r} = 0, \\
\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{qz}}{\partial q} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть радиусы стенок трубы $a$ и $b(a<b)$, эксцентриситет – $c$. Уравнение внешнего контура трубы имеет вид

$$(x-c)^2+y^2=b^2. \tag{2}$$

Полагая $x=r\cos q$ , $y=r\sin q$ , перепишем (2) в виде

$$r^2-2dr\cos q+(d^2-b^2)=0, \tag{3}$$

где

$$d=\frac{c}{r_s^0},\ r=\frac{r}{r_s^0},\ b=\frac{b}{r_s^0},\ a=\frac{a}{r_s^0}, \tag{4}$$

$r_s^0$ – радиус упругопластической зоны в невозмущенном состоянии.

Из (3) найдем

$$r=d\cos q+\sqrt{b^2-d^2\sin^2 q}=b+d\cos q-\frac{d^2}{2b}\sin^2 q-\frac{d^4}{8b^3}\sin^4 q+\ldots \tag{5}$$

Предполагается, что на внутренней поверхности трубы не действуют касательные усилия; тогда в нулевом приближении будем иметь

$$t_{rq}^{(0)}=t_{rz}^{(0)}=t_{qz}^{(0)}=0. \tag{6}$$

Все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от $r$ .

Согласно (6) уравнения равновесия в цилиндрической системе координат (1) примут вид

$$\frac{ds_r^{(0)}}{dr}+\frac{s_r^{(0)}-s_q^{(0)}}{r}=0. \tag{7}$$

Условие пластичности Мизеса в анизотропном состоянии в условиях сжимаемости имеет вид [3]

$$A(s_r-s_q)^2+B(s_q-s_z)^2+C(s_z-s_r)^2=6(1+fs)^2, \tag{8}$$

где $A,B,C$ – постоянные величины, имеющие вид:

$$\begin{aligned} A&=1+da,\\ B&=1+db,\\ C&=1+dc. \end{aligned} \tag{9}$$

$a,b,c,f-const$.

Пусть

$$s_z=\frac{s_r+s_q}{2}, \tag{10}$$

тогда условие пластичности (8) с учетом (10) примет вид:

$$\left(\frac{4A+B+C}{4}\right)(s_r-s_q)^2=6(1+fs)^2,$$

$$(4A+B+C)\left(s_r - s_q\right)^2 = 24(1+fs)^2. \qquad (11)$$

Решение уравнения (7) согласно условию пластичности (11) и граничному условию

$$s_r^p = -p \quad \text{при} \quad r=a\,, \quad p=const \qquad (12)$$

в пластической зоне имеет вид [4]:

$$s_r^{(0)p} = \frac{1-pf}{f}\left(\frac{r}{a}\right)^{-Mf} - \frac{1}{f},$$

$$s_q^{(0)p} = \frac{3+2f}{3-4f}\cdot\frac{1-pf}{f}\left(\frac{r}{a}\right)^{-Mf} - \frac{1}{f}, \quad \text{где} \quad M = -\frac{6}{3-4f}\,. \qquad (13)$$

В упругой зоне решение уравнения (7) определяется из условия сжимаемости, закона Гука и граничного условия

$$s_r^{(0)} = q \quad \text{при} \quad r=b \qquad (14)$$

и имеет вид

$$s_r^{(0)e} = q + 2GC_1\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right), \; s_q^{(0)e} = q + 2GC_1\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right), \; C_1 = const\,. \qquad (15)$$

Постоянную $C_1$ определим, удовлетворив (13) и (15) условиям сопряжения.

Тогда выражения (15) принимают вид:

$$s_r^{(0)e} = q - \frac{M(1-pf)}{2}a^{Mf}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right), \qquad (16)$$

$$s_q^{(0)e} = q - \frac{M(1-pf)}{2}a^{Mf}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right), \; t_{rq}^{(0)e} = 0\,.$$

Величина $r_s^0$ определяется из трансцендентного уравнения

$$q = \frac{1-pf}{f}\cdot\frac{3-f}{3-4f}a^{Mf} - \frac{1}{f}. \qquad (17)$$

В рассматриваемой задаче внутренний контур и внешние нагрузки на нем не фиксированы, поэтому

$$s_{ij}^{(I)p} \neq 0\,, \quad s_{ij}^{(II)p} \neq 0. \qquad (18)$$

Определим компоненты напряженного состояния в пластической области в первом приближении.

Линеаризуя условие пластичности (8), в первом приближении получим

$$36m\left(\frac{1-pf}{3-4f}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^{-2Mf} - 72\left(\frac{1-pf}{3-4f}\right)\left(s_r^{(I)} - s_q^{(I)}\right) = 0, \; \text{где} \; m = 4a+b+c. \qquad (19)$$

Из (19) получим

$$s_r^{(I)} - s_q^{(I)} = \frac{m}{2}\left(\frac{1-pf}{3-4f}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{-2Mf}. \qquad (20)$$

В первом приближении уравнения (1) примут вид:

$$\frac{ds_r^{(I)}}{dr}+\frac{s_r^{(I)}-s_q^{(I)}}{r}=0,$$
$$\frac{dt_{rq}^{(I)}}{dr}+\frac{2t_{rq}^{(I)}}{r}=0. \qquad (21)$$

Решив второе уравнение системы (21), получим

$$t_{rq}^{(I)}=\frac{C_1}{r^2}. \qquad (22)$$

Найдем постоянную $C_1$, удовлетворив (22) граничным условиям,

$$t_{rq}^{(I)}-(s_q^{(0)}-s_r^{(0)})\dot{R}_1=0. \qquad (23)$$

Из (22), (23) получим

$$C_1=t\sin q, \text{ где } t=\frac{mb}{2}\left(\frac{pf-1}{3-4f}\right). \qquad (24)$$

Учитывая (22), (23), (24), получим

$$t_{rq}^{(I)}=\frac{t\sin q}{r^2}. \qquad (25)$$

Решим первое уравнение системы (21), учитывая условие (20),

$$s_r^{(Ip)}=\frac{s}{2Mf}\cdot\frac{1}{r^{2Mf}}+C_2,$$
$$s_q^{(Ip)}=\frac{s}{r^{2Mf}}\left(\frac{1}{2Mf}-1\right)+C_2.$$

Определим компоненты напряженного состояния в упругой области в первом приближении.

Из условий сопряжения решения

$$\left[s_{ij}^{(0)}\right]=0, \quad \left[s_{ij}^{(I)}+\frac{\partial s_{ij}^{(0)}}{\partial r}r_{1s}\right]=0 \quad \text{при} \quad r=1; \qquad (26)$$

$$\left[s_{ij}^{(II)}+\frac{\partial s_{ij}^{(I)}}{\partial r}r_{1s}+\frac{\partial^2 s_{ij}^{(0)}}{\partial r^2}\frac{r_{1s}^2}{2}+\frac{\partial s_{ij}^{(0)}}{\partial r}r_{2s}\right]=0 \quad \text{при} \quad r=1$$

в первом приближении согласно (13), (16) получим

$$s_r^{(I)e}=t_{rq}^{(I)e}=0 \quad \text{при} \quad r=1, \qquad (27)$$

а также

$$s_q^{(I)e}=\frac{4}{h}r_{1s} \text{ при } r=1, \text{ где } h=\frac{(3-4f)^2}{3(1-pf)(3-f)}a^{-Mf}. \qquad (28)$$

Граничные условия на внешней поверхности трубы в первом приближении согласно (13), (16) и линеаризованным граничным условиям на внешнем контуре трубы в первом приближении

$$s_r^{(I)} + \frac{ds_r^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{d\mathrm{P}_n}{dr} r_1, \quad t_{rq}^{(I)} - \left(s_q^{(0)} - s_r^{(0)}\right) R_1 = \frac{d\mathrm{P}_t}{dr} r_1 \quad \text{при } r = b \tag{29}$$

примут вид

$$s_r^{(I)e} = \frac{n}{b^3}\cos\theta, \quad t_{rq}^{(I)e} = \frac{n}{b^3}\sin q \quad \text{при } r = b \text{ , где } n = M(1-pf)a^{Mf}. \tag{30}$$

Условия (27), (29) позволяют определить напряжения в упругой области:

$$\begin{aligned} s_r^{(I)e} &= \frac{n}{b^4}\left[r + \frac{1}{b^4-1}\left(r - \frac{b^4}{r^3}\right)\right]\cos q, \\ s_q^{(I)e} &= \frac{n}{b^4}\left[3r + \frac{1}{b^4-1}\left(3r + \frac{b^4}{r^3}\right)\right]\cos q, \\ t_{rq}^{(I)e} &= \frac{n}{b^4}\left[r + \frac{1}{b^4-1}\left(r - \frac{b^4}{r^3}\right)\right]\sin q. \end{aligned} \tag{31}$$

Из (28) и (31) найдем

$$r_{1s} = \frac{hn}{b^4-1}\cos q. \tag{32}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. − Воронеж : Колос, 2005. − 205 с.

2. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

3. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. − М. : Физматлит, 2001. − С. 33−185.

4. *Михайлова, М. В.* О влиянии сдвигов на упругоидеальнопластическое состояние пластины с круговым отверстием при двуосном растяжении / М. В. Михайлова, Л. И. Афанасьева // Проблемы механики неупругих деформаций. – М. : Физматлит, 2001. – С. 211–228.